Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Física Estadística fuera del equilibrio
Profesores: Gonzalo Gutiérrez, Sergio Davis

Tarea 2
Viernes 20 Mayo 2011

Procesos Estocásticos

1. La ecuación que describe la difusión de una gota de vino tinto en un vaso de agua, en una dimensión, está dada por

$$D\frac{\partial^2 \phi(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial \tau}. \tag{1}$$

Aquí $\phi(x,t)$ es la densidad del material que difunde, en el punto x y tiempo t, y D es la constante de difusión.

Suponga que la condición inicial (a $t=0$) corresponde a una gota puntual en $x=0$, es decir, $\phi(x,0)=\phi_0\delta(x)$.

a) Aplique la transformada de Fourier directamente a la ecuación de difusión y muestre que lo obtenido es de la forma

$$Q(k,\tau) = Q(k,0)\exp(-k^2 D\tau),$$

donde $Q(k,\tau)$ es la transformada de Fourier de $\phi(x,\tau)$.

b) Use la condición inicial $\phi(x,0)$ para obtener $Q(k,0)$. Para ello, recuerde que $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0)$.

c) De los pasos anteriores se obtiene $Q(k,\tau) = (\phi_0/\sqrt{2\pi})\exp(-k^2 D\tau)$.
De aquí muestre que la solución de la ecuación de difusión es

$$\phi(x,\tau) = \phi_0\frac{\exp(-x^2/4D\tau)}{\sqrt{4\pi D\tau}}.$$

Note que este problema, y su resultado, es completamente análogo a la difusión de calor (ecuación del calor), difusión de neutrones en un moderador (ecuación de la edad de Fermi) o de impurezas en un semiconductor (ecuación de Fick), así como la densidad de probabilidad en el movimiento browniano.

2. La entropía de información de Shannon se define como

$$S_I = -\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\ln P(x)dx, \tag{2}$$

y es un indicador de la incertidumbre que tendría una medición de x. Derive una expresión para la entropía de Shannon asociada a la posición de una partícula browniana de masa m en un medio con roce α y a temperatura T. ¿Cómo varía esta entropía en el tiempo?

3. Considere el caso de una distribución de probabilidad $P(x)$ que se desea simular (es decir, generar muestras que sigan tal probabilidad). Muestre que el imponer una tasa de transición dada por $W(x \to x') = 1$ si $P(x') > P(x)$ y $W(x \to x') = P(x')/P(x)$ en caso contrario, conducirá invariablemente en equilibrio a la distribución $P(x)$.

   Esta receta es el fundamento de los métodos numéricos de Monte Carlo, usados abundantemente en Mecánica Estadística y otras áreas.

   Ayuda: La función escalón Θ de Heaviside es su amiga, úsela.

4. Calcule el desplazamiento cuadrático medio $< x^2(t) >$ de un proceso estocástico unidimensional que se rige por la siguiente ecuación de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha t^{\nu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{3}$$

   donde α, β y ν son constantes, y $0 < \nu < 1$.