Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 2B

Lunes 28 Noviembre 2011

Series de Fourier en Ecuación del Calor

1. Resuelva la ecuación del calor para las condiciones dadas.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x) & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

2. Resuelva la ecuación del calor para los distintos casos de $f(x)$.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

   a) $f(x) = \sin x - 6\sin(4x)$
   b) $f(x) = \sin(3x) + 5\sin(7x) - 2\sin(13x)$
   c) $f(x) = \sin(x) - 7\sin(3x) + \sin(5x)$
   d) $f(x) = \sin(4x) + 3\sin(6x) - \sin(10x)$

3. Determine la solución del problema de flujo de calor

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \end{array}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x & , \quad \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

4. Determine la solución del problema de flujo de calor para los distintos casos de $f(x)$.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \end{array}$$

   a) $f(x) = 1 - \cos(2x)$
   b) $f(x) = x(\pi - x)$
   c) $f(x) = \begin{cases} -x & , \quad 0 < x \leq \pi/2 \\ x - \pi & , \quad \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$

5. Determine la solución de ecuación del calor para las siguientes condiciones dadas

a)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &, \quad & 0 < x < 1, t > 0 \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 &, \quad & t > 0 \\ &u(x,0) = (1-x)x^2 &, \quad & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &, \quad & 0 < x < \pi, t > 0 \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 &, \quad & t > 0 \\ &u(x,0) = x^2 &, \quad & 0 < x < \pi \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &, \quad & 0 < x < \pi, t > 0 \\ &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 &, \quad & t > 0 \\ &u(x,0) = x &, \quad & 0 < x < \pi \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &, \quad & 0 < x < 1, t > 0 \\ &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 &, \quad & t > 0 \\ &u(x,0) = x(1-x) &, \quad & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &, \quad & 0 < x < \pi, t > 0 \\ &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 &, \quad & t > 0 \\ &u(x,0) = e^x &, \quad & 0 < x < \pi \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &, \quad & 0 < x < \pi, t > 0 \\ &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 &, \quad & t > 0 \\ &u(x,0) = 1 - \sin x &, \quad & 0 < x < \pi \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &, \quad & 0 < x < \pi, t > 0 \\ &u(0,t) = 5, u(\pi,t) = 10 &, \quad & t > 0 \\ &u(x,0) = \sin(3x) - \sin(5x) &, \quad & 0 < x < \pi \end{aligned}$$

Series de Fourier en Ecuación de la Onda

6. Resuelva la ecuación de la onda para las condiciones iniciales dadas.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(3x) - 4\sin(10x) & , \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 2\sin(4x) + \sin(6x) & , \quad 0 \le x \le \pi \end{array}$$

7. Resuelva la ecuación de la cuerda vibrante para los distintos casos de $f(x)$ y $g(x)$.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \end{array}$$

a) $f(x) = 3\sin(2x) + 12\sin(13x)$
$g(x) = 0$

b) $f(x) = 0$
$g(x) = -2\sin(3x) + 9\sin(7x) - \sin(10x)$

c) $f(x) = 6\sin(2x) + 2\sin(6x)$
$g(x) = 11\sin(9x) - 14\sin(15x)$

d) $f(x) = \sin x - \sin(2x) + \sin(3x)$
$g(x) = 6\sin(3x) - 7\sin(5x)$

8. Determine la solución de la ecuación de onda para las siguientes condiciones dadas

a)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin(7\pi x) & , \quad 0 < x < 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin^2 x & , \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1 - \cos x & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2(\pi - x) & , \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(4x) + 7\sin(5x) & , \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & , \quad \pi/2 < x\pi \end{cases} & \end{array}$$

9. Considere una barra de metal puesta horizontalmente, apoyada sólo en los extremos (en $x = 0$ y $x = L$). La barra está cargada con una carga en función de la posición $q(x) = ax/L$ por unidad de longitud.

   La barra, producto de la carga, tiene una deflexión que esta dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{R}$$

   donde R es la rigidez de la barra.

   a) Obtenga la deflexión de la barra en términos de una serie de Fourier. La solución es

$$y(x) = \frac{2aL^4}{R\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

   b) Encuentre la solución en forma cerrada (integrando directamente la ecuación diferencial). Compare en un gráfico ambas soluciones.