Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 2
Martrs 24 Agosto 2010

Paridad e Imparidad de Funciones

1. Determinar si las siguientes funciones son par, impar o ninguna de las dos.
   a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
   b) $f(x) = x^{1/3} - \sin x$
   c) $f(x) = e^x$
   d) $f(x) = x^3 + \sin 2x$
   e) $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
   f) $f(x) = e^{-x}\cos 3x$

2. Evaluar las siguientes integrales cuando m y n son enteros positivos.
   a) $\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$
   b) $\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$
   c) $\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$

Series de Fourier de periodo 2π

3. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi < x < 0 \\ x & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

4. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

5. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = x$$

   donde $-\pi < x < \pi$.

6. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = x^2$$

   donde $-\pi < x < \pi$.

7. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = e^x$$

donde $-\pi < x < \pi$.

Series de Fourier de periodo arbitrario

8. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = |x|$$

donde $-1 < x < 1$. Dibuje, en un mismo gráfico, las sumas parciales con 1 ,2, 3 ,4 y 5 términos, junto con $f(x)$. Luego grafique las sumas parciales de Fourier $S_n(x)$ con $n = 50, 60, 70$ y verifique el fenómeno de Gibbs.

9. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -2 < x < 0 \\ x & , \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

10. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 < x < -1 \\ k & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

11. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -T/2 < x < 0 \\ E \sin wx & , \quad 0 < x < T/2 \end{cases}$$

12. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -2 < x < 0 \\ e^{-t} & , \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

Series de Fourier de mitad de periodo

13. Encontrar la serie de Fourier de

$$f(x) = 1$$

donde $0 < x < \pi$.

14. Encontrar la serie de Fourier de

$$f(x) = x^2$$

donde $0 < x < l$.

15. Encontrar la serie de Fourier de

$$f(x) = 1 - \frac{x}{l}$$

donde $0 < x < l$.

16. Encontrar la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & , \quad 0 < x < l/2 \\ \frac{2k}{l}(l-x) & , \quad l/2 < x < l \end{cases}$$

Derivación e Integración de Series de Fourier

17. Derive la serie de Fourier de la función $f(x) = x$, con $-\pi < x < \pi$, término a término. Estudie si la serie obtenida converge.

18. Derive la serie de Fourier (término a término) de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \pi \\ -x & , \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Estudie si la serie obtenida converge.

19. Muestre que la integración de la serie de Fourier de $f(x) = x$, donde $-\pi < x < \pi$, conduce a

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-2}$$

20. Determinar la función representada por la serie obtenida a partir de integrar cada término, desde $-\pi$ a x, de la serie

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

donde $f(x) = x$ y $-\pi < x < \pi$.

21. Determinar la función representada por la serie obtenida a partir de integrar cada término, desde $-\pi$ a x, de la serie

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1} x$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

22. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & , \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Mostrar, mediante integración, que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \frac{(\pi+x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{(\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Serie doble de Fourier

23. Calcular la serie doble de Fourier de $f(x, y) = 1$, donde $0 < x < a$ y $0 < y < b$.

24. Calcular la serie doble de Fourier de $f(x, y) = xy$, donde $0 < x < a$ y $0 < y < b$.

25. Calcular la serie doble de Fourier de $f(x, y) = x + y$, donde $0 < x < a$ y $0 < y < b$.

26. Calcular la serie doble de Fourier de $f(x, y) = g(x)h(y)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < a/2 \\ a - x & , \quad a/2 < x < a \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} y & , \quad 0 < y < b/2 \\ b - y & , \quad b/2 < y < b \end{cases}$$

Otros

Considere una barra de metal puesta horizontalmente, apoyada sólo en los extremos (en $x = 0$ y $x = L$). La barra está cargada con una carga en función de la posición $q(x) = ax/L$ por unidad de longitud.

La barra, producto de la carga, tiene una deflexión que esta dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{R}$$

donde R es la rigidez de la barra.

a) Obtenga la deflexión de la barra en términos de una serie de Fourier. La solución es

$$y(x) = \frac{2aL^4}{R\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

b) Encuentre la solución en forma cerrada (integrando directamente la ecuación diferencial). Compare en un gráfico ambas soluciones.