Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

**Guía 3**

Jueves 26 Agosto 2010

---

## Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

2. Calcular la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}$, donde $x > 0$.

3. Calcular la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Calcular la transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < a \\ 0 & , \quad x > a \end{cases}$$

5. Calcular la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\lambda t} & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

donde $\lambda$ es mayor que cero.

## Transformada Inversa de Fourier

6. Calcular la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones

   *a)* $\frac{\sin aw}{w}$

   *b)* $\frac{1-\cos aw}{w}$

   *c)* $e^{-w^2}$

   *d)* $\frac{w}{w^2+1}$

   *e)* $\frac{-i}{w^2-i2\alpha w-\alpha^2}$

## **Problemas varios**

7. Sea $F(w)$ la transformada de Fourier de $f(x)$ y $G(w)$ la transformada de Fourier de $g(x) = f(x+a)$. Muestre que

$$G(w) = e^{-iaw} F(w)$$

8. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

   *a*) Encuentre $g_c(w)$, la transformada coseno de Fourier de $f(x)$.

   *b*) Tomando la inversa de la transformada coseno, muestre que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w} dw$$

   *c*) De la parte b muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w} dw = \begin{cases} 0 & , \quad |x| > 1 \\ \frac{\pi}{4} & , \quad |x| = 1 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad |x| < 1 \end{cases}$$

9. Muestre que las transformadas seno y coseno de $e^{-at}$ son

$$g_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{w^2 + a^2}$$

$$g_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2 + a^2}$$

   Ahora muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{w^2 + a^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{w^2 + a^2} dw = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

   con $x > 0$. Estos resultados pueden ser obtenidos por integración de contorno.

10. Calcular la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-a|x|}$. Luego, calcular la transformada inversa utilizando cálculo de residuos.

11. Probar que

$$\frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iwt}}{E_0 - i\Gamma/2 - hw} dw = \begin{cases} e^{-\Gamma t/2h} e^{-iE_0 t/h} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

## Aplicaciones

12. En una cavidad resonante una oscilación electromagnética de frecuencia $w_0$ desvanece como

$$A(t) = A_0 e^{-w_0 t/2Q} e^{-iw_0 t}$$

con $t > 0$ (considere $A(t) = 0$ para $t < 0$). El parámetro $Q$ es una medida de la razón de la energía almacenada respecto a la energía perdida por ciclo. Calcular la distribución de frecuencia de la oscilación, es decir $a^*(w)a(w)$, donde $a(w)$ es la transformada de Fourier de $A(t)$.

13. Mostrar que la solución de la ecuación

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - K^2\phi(x) = f(x)$$

está dada por

$$\phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + K^2} \tilde{f}(k) dk$$

donde $\tilde{f}(k)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$.

14. Considere la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

con la condición inicial $y(x, 0) = f(x)$. Encuentre $y(x, t)$.

15. Considere un oscilador amortiguado de masa $M$, el cual aislado, está descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\eta \frac{dx}{dt} + w_0^2 x(t) = 0$$

Para $0 \leq t \leq T$, se aplica una fuerza

$$F(t) = M f_0 e^{-t/\tau}$$

Encuentre la posición $x(t)$ del oscilador armónico para $t \geq 0$.