Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 4

Viernes 23 de Diciembre de 2011

Producto de Convolución

1. Considere el producto de convolución definido como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

   Calcule este producto considerando

   a) $f(t) = 1$ y $g(t) = 1$
   b) $f(t) = 1$ y $g(t) = t$
   c) $f(t) = t$ y $g(t) = t^2$
   d) $f(t) = t$ y $g(t) = \sin t$

2. Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1/2 & , \quad -1 < t < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(t) = te^{-t^2}$$

   Calcule $f(t) * g(t)$.

3. Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 2 & , \quad 1 < t < 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 2/5t & , \quad 0 < t < 5 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Calcule $f(t) * g(t)$.

4. Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & , \quad -1 < t < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule $f(t) * g(t)$.

5. Demuestre las siguientes relaciones

   a)
   $$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = -\int_0^{\infty} F_s(K)G_s(K)\cos(Kx)dK$$
   donde f, g son funciones impares y F_s, G_s son sus respectivastransformadas de Fourier seno.

   b)
   $$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = \int_0^{\infty} F_c(K)G_c(K)\cos(Kx)dK$$
   donde f, g son funciones pares y F_c, G_c son sus respectivas transformadas de Fourier coseno.

6. Muestre que la convolución entre dos funciones es simétrica, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

7. Muestre que si $g(t)$ y $f(t)$ son cero para $t < 0$, entonces la convolución de las dos funciones, es decir $g(t) * f(t)$, también es cero para $t < 0$.

Teorema de Convolución

8. Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \leq 1/2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |t| & , \quad |t| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Muestre que $g = f * f$.
   b) Calcule $\mathcal{F}\{g, s\}$ (es decir, $\mathcal{F}\{f * f, s\}$) utilizando el teorema de convolución.

9. Calcule la convolución entre

$$f_A(t) = e^{-(t-a)^2/A^2}$$
$$f_B(t) = e^{-(t-b)^2/B^2}$$

Luego, calcule este producto de convolución mediante el teorema que relaciona ello con la transformada de Fourier.

10. Calcule la convolución entre

$$f_A(t) = \frac{1}{A^2 + t^2}$$

$$f_B(t) = \frac{1}{B^2 + t^2}$$

Luego, calcule este producto de convolución mediante el teorema que relaciona ello con la transformada de Fourier.

11. Considere las funciones

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{2bx} & , \quad |x| < b \\ 0 & , \quad |x| > b \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{3ibx} & , \quad |x| < b \\ 0 & , \quad |x| > b \end{cases}$$

A partir de éstas, calcule $\mathcal{F}\{f_1 * f_2, k\}$ utilizando los dos métodos descritos a continuación:

a) Método directo. Esto es, calcular la transformada de Fourier de la convolución utilizando la definición.

b) Utilizando las propiedades de las transformadas de Fourier asociadas al producto de convolución