

**Guía 6**  
Martes 25 Mayo 2010

---

\* Esta es una guía con problemas adicionales. El resto de problemas para ejercitarse son los correspondientes al Capítulo 4 del libro de Churchill y Brown.

**Integrales de Línea**

1. Calcular  $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$  a lo largo de
  - a) La parábola  $x = 2t, y = t^2 + 3$
  - b) Las líneas rectas desde  $(0, 3)$  a  $(2, 3)$  y luego desde  $(2, 3)$  a  $(2, 4)$
  - c) La línea recta desde  $(0, 3)$  a  $(2, 4)$
2. Calcular  $\int_C \bar{z} dz$  desde  $z = 0$  a  $z = 4 + 2i$  a lo largo de la curva  $C$  dada por
  - a)  $z = t^2 + it$
  - b) La línea desde  $z = 0$  a  $z = 2i$  y luego la línea desde  $z = 2i$  a  $z = 4 + 2i$ .
3. Calcular  $\int_{(0,1)}^{(2,5)} (3x + y)dx + (2y - x)dy$  a lo largo de
  - a) la curva  $y = x^2 + 1$
  - b) la línea recta que une  $(0, 1)$   $(2, 5)$
  - c) la línea recta desde  $(0, 1)$  a  $(0, 5)$  y luego desde  $(0, 5)$  a  $(2, 5)$
4. Calcular  $\oint_C (x + 2y)dx + (y - 2x)dy$  alrededor de la elipse  $C$  definida por
  - a)  $x = 4 \cos \theta, y = 3 \sin \theta, 0 \leq \theta < 2\pi$ , si  $C$  está descrita en la dirección contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj.
  - b) ¿Qué sucede en  $4a$  si  $C$  está descrita en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj?
5. Calcular  $\int_C (x^2 - iy^2)dz$  a lo largo de
  - a) la parábola  $y = 2x^2$  desde  $(1, 1)$  a  $(2, 8)$
  - b) las líneas rectas desde  $(1, 1)$  a  $(1, 8)$  y luego desde  $(1, 8)$  a  $(2, 8)$
  - c) la línea recta desde  $(1, 1)$  a  $(2, 8)$
6. Calcular  $\oint |z|^2 dz$  alrededor del cuadrado con vértices en  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ .

7. Calcular  $\int_C (z^2 + 3z)dz$  a lo largo de
- el círculo  $|z| = 2$  desde  $(2, 0)$  a  $(0, 2)$  en una dirección contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj.
  - la línea recta desde  $(2, 0)$  a  $(0, 2)$ .
  - las líneas rectas desde  $(2, 0)$  a  $(2, 2)$  y luego desde  $(2, 2)$  a  $(0, 2)$ .

8. Calcular  $\oint_C \bar{z}^2 dz$  alrededor de los círculos

- $|z| = 1$
- $|z - 1| = 1$

9. Demostrar que  $\int F(z)G'(z)dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)dz$ .

10. Utilizando el resultado de 9, calcular

- $\int_0^1 ze^{2z} dz$
- $\int_0^{2\pi} z^2 \sin 4z dz$

11. Demostrar que

$$\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a} + c_1 = \frac{1}{2ai} \ln \left( \frac{z - ai}{z + ai} \right) + c_2$$

Note que es una integral indefinida.

### Teorema de Cauchy-Goursat

12. Calcular  $\oint_C \frac{dz}{z-a}$  donde  $C$  es una curva simple cerrada y  $z = a$  está

- fuera de  $C$ .
- dentro de  $C$ .

13. Calcular  $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$  donde  $z = a$  está dentro de la curva simple cerrada  $C$ .

14. Si  $C$  es la curva  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  que une los puntos  $(1, 1)$  y  $(2, 3)$ , hallar el valor de

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz$$

15. Calcular  $\int_C (z+2)e^{iz} dz$  a lo largo de la parábola  $C$  definida por  $\pi^2 y = x^2$  desde  $(0, 0)$  a  $(\pi, 1)$ .

### Fórmula Integral de Cauchy

16. Calcular  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$  si  $C$  es
- el círculo  $|z| = 3$
  - el círculo  $|z| = 1$
17. Calcular  $\oint_C \frac{\sin 3z}{z+\pi/2} dz$  si  $C$  es el círculo  $|z| = 5$ .
18. Calcular  $\oint_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz$  si  $C$  es
- el círculo  $|z - 1| = 4$
  - la elipse  $|z - 2| + |z + 2| = 6$
19. Calcular  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2-1} dz$  si  $C$  es un rectángulo de vértices
- $2 \pm i, -2 \pm i$
  - $-i, 2 - i, 2 + i, i$
20. Probar

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + z} = 0$$

donde  $C$  es el círculo de radio 2.

21. Probar que

$$f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^4} dz$$

si  $C$  es una curva simple cerrada alrededor de  $|z| = a$  y  $f(z)$  es analítica en el interior y sobre  $C$ .

22. Calcular, considerando que  $C$  es el círculo  $|z| = 3$

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

23. Calcular, considerando que  $C$  es el círculo  $|z| = 3$

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

24. Calcular la integral

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz$$

- si  $C$  es la circunferencia cerrada  $|z| = 2$
- si  $C$  es la circunferencia cerrada  $|z| = 3, 15$