Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 6

Martes 21 Septiembre 2010

Distribuciones y Transformada de Fourier

1. Calcule la transformada de Fourier de $\delta(x-a)+\delta(x+a)$.

2. Se puede definir la sucesión

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & , \quad |x| < 1/2n \\ 0 & , \quad |x| > 1/2n \end{cases}$$

   Exprese $\delta_n(x)$ como una integral de Fourier. Muestre que se puede escribir

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk$$

3. Usando la sucesión

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

   muestre que

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk$$

4. Considere la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$\left[-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

   donde $E = \frac{h^2}{2m}k^2$ y $V(x) = \frac{h^2}{2m}Q\delta(x)$. Encuentre $\psi(x)$.

5. La ecuación unidimensional de difusión de neutrones con una fuente puntual es

$$-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + K^2 D\phi(x) = Q\delta(x)$$

   donde $\phi(x)$ es el flujo de neutrones, $Q\delta(x)$ representa la fuente en $x=0$, D y K son constantes.

   a) Use el formalismo de transformada de Fourier para encontrar $\phi(x)$.

   b) Obtenga la respuesta a la excitación de la forma $f(x) = \gamma x^2$, con γ una constante.

6. Para una fuente puntual en el origen, la ecuación de difusión de neutrones en tres dimensiones es

$$-D\nabla^2\phi(\vec{r}) + K^2 D\phi(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r})$$

Aplique la transformada de Fourier en tres dimensiones. Resuelva la ecuación obtenida. Transforme la solución de regreso al espacio $\vec{r}$.

7. Encuentre la transformada de Fourier de

$$f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

Compare el resultado con la transformada de Fourier de $\delta(t)$.

8. Calcule la transformada de Fourier del pulso cuadrado

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < T/2 \\ 0 & , \quad |t| > T/2 \end{cases}$$

de las siguientes formas

   a) Calculando directamente la transformada de Fourier de $f(t)$.

   b) Calculando la transformada de Fourier de $\frac{df}{dt}$ y utilizando a continuación la propiedad $\mathcal{F}\{\frac{df}{dt}, w\} = iw\mathcal{F}(w)$.

   c) Compare los resultados obtenidos en ambas partes.