Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 7

Martes 8 Junio 2010

Tarea: Guía 6, Prob. 11 y 18; Guía 7, Prob. 11. Entrega: Viernes 18 de Junio.

Convergencia de Series

1. Probar

   a) $\sum_{n=0}^{N-1} \cos nx = \frac{\sin N(x/2)}{\sin x/2} \cos(N-1)\frac{x}{2}$

   b) $\sum_{n=0}^{N-1} \sin nx = \frac{\sin N(x/2)}{\sin x/2} \sin(N-1)\frac{x}{2}$

2. Considerando $|p| < 1$, probar

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1-p\cos x}{1-2p\cos x+p^2}$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} p^n \sin nx = \frac{p\sin x}{1-2p\cos x+p^2}$

3. Verificar

$$
\begin{aligned}
\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

   Luego, probar que $\cosh' z = \sinh z$ haciendo uso de las anteriores series.

4. Probar que para todo z se tiene

$$
e^z \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}\sin(n\pi/4)}{n!} z^n
$$

5. Determine los primeros términos de la serie en potencias de z para $\tan z$, conociendo las series respectivas para $\cos(z)$ y $\sin(z)$.

$$
\frac{\sin z}{\cos z} = \tan z = \sum_{s=0}^{\infty} t_s z^s \tag{1}
$$

   Hint: de la ecuación (1) se tiene que

$$
\sin z = \cos z \sum_{s=0}^{\infty} t_s z^s \tag{2}
$$

   De aquí, con las series de $\sin z$ y $\cos z$, se pueden identificar los coeficientes t_s.

Series de Taylor

6. Desarrollar $f(z) = e^{-z}$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$.

7. Desarrollar $f(z) = \frac{1}{1+z}$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 1$.

8. Desarrollar $f(z) = ze^{2z}$ en una serie de Taylor alrededor de $z = -1$.

9. Considere que cada una de las siguientes funciones se puede desarrollar en una serie de Taylor para los puntos indicados, ¿Cuál sería la región de convergencia en cada caso?

   a) $\frac{\sin z}{(z^2+4)}$, $z = 0$
   b) $\frac{z}{(e^z+1)}$, $z = 0$
   c) $\frac{z+3}{(z-1)(z-4)}$, $z = 2$
   d) $e^{-z^2} \sinh(z + 2)$, $z = 0$

10. Desarrollar $f(z) = \sin z$ en una serie de Taylor alrededor de

    a) $z = 0$ y determinar su región de convergencia.
    b) $z = \pi/4$ y determinar su región de convergencia.

11. Considere la función

$$f(z) = -\frac{z}{(z-3)(z-4)}$$

   a) Encuentre la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$, especificando su región de validez.
   b) Encuentre la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 1$, especificando su región de validez.
   c) Encuentre la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 2$, especificando su región de validez.

12. Considere la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

   a) Determine la expansión de Taylor en $z = 0$ e indique la región de convergencia.
   b) Determine la expansión de Taylor en $z = 1 + i$ e indique la región de convergencia.

13. Sea $f(z) = \text{Arcsin}\, z$ que toma el valor cero para $z = 0$, mostrar que

$$\text{Arcsin}\, z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{z^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{z^7}{7} + \ldots$$

   considerando que $|z| < 1$.

Series de Laurent

14. Encontrar la serie de Laurent, indicando la región de convergencia, para la siguientes funciones

    a) $f(z) = \frac{1}{z-3}$, centrada en $z = 3$.
    b) $f(z) = \frac{1}{z}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = i$.
    c) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = 1$.
    d) $f(z) = \frac{1}{z^3(1+z)}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = -1$.
    e) $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = i$.
    f) $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = 2$.

15. Encontrar la serie de Laurent, indicando la región de convergencia, para la siguiente función

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

    a) centrada en $z = 0$.
    b) centrada en $z = -2$.
    c) centrada en $z = -1$.

16. Considere la siguiente expansión en serie

$$f(z) = -\frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n}\right)$$

    para $a < |z| < b$.

    a) Encuentre la función que representa la anterior expresión.
    b) Considerando la función encontrada, escriba los desarrollos de Laurent para $|z| < a$ y $|z| > b$ con $a < b$.

17. Demuestre la siguiente representación en serie de Laurent, especificando su radio de convergencia

$$z^3 \cosh\frac{1}{z} = \frac{z}{2} + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!}\frac{1}{z^{2n-1}}, 0 < |z| < \infty$$

18. Escriba las series de Laurent, indicando la región de convergencia, para

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 3z^3 + 2z^2}$$

19. Determine la Serie de Laurent para

$$f(z) = (z-1)^2\, e^{\frac{1}{z-1}}$$

    Hint: Considere la serie para e^w y haga la sustitución $w = 1/(z-1)$

Convergencia Absoluta y Uniforme

20. Probar que la siguiente serie converge absolutamente para $|z| \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$$

21. Encontrar la región de convergencia de las siguientes series

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

Integración y Derivación de Series de Potencias

22. Sea $f(z) = \ln(1+z)$, donde se considera la rama que toma el valor cero cuando $z = 0$.

   a) Desarrollar $f(z)$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$.

   b) Determinar la región de convergencia para la anterior serie.

   c) Desarrollar $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$.

23. Sea f una función analítica en un dominio anular ($R_1 < |z - z_0| < R_2$) en torno del origen que contiene al círculo unidad $z = e^{i\phi}(-\pi \leq \phi \leq \pi)$. Tomando ese círculo como camino de integración para obtener los coeficientes a_n y a_{-n} en una serie de Laurent en potencias de z, probar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) d\phi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) \left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n \right] d\phi$$

   cuando z es cualquier punto del dominio anular.

24. Calcular

$$g(z) = \int_0^z f(s) ds$$

   considerando que

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\sin s}{s} & , \quad s \neq 0 \\ 0 & , \quad s = 0 \end{cases}$$