Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 7
2 enero 2012

Convolución de distribuciones

1. A partir de la definición del producto convolución demuestre la identidad de Plancherel (ver página 53 Apuntes). Luego, particularizando, obtenga la relación de Parseval.

2. Demuestre los siguientes productos de convolución

   a) $f(t) * \delta(t) = f(t)$

   b) $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

   c) $f(t - t_1) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0 - t_1)$

3. Calcule la convolución de la función $f(x) = \delta(x + a) + \delta(x - a)$ con la función dada por

$$g(y) = \begin{cases} 1 & , \quad |y| < b \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de Green

4. Encuentre, mediente el método de función de Green, una solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y(x) = x$$

5. Considere una cuerda estirada en reposo bajo una carga externa distribuida dada por $F(x)$. El desplazamiento u de la cuerda es una función de x y satisface la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{F(x)}{T}$$

   Las condiciones de borde son $u(0) = u(L) = 0$, donde L es el largo de la cuerda y T una constante. Encuentre $u(x)$.

6. Muestre que la función de Green de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{4} = f(x)$$

   sujeto a las condiciones de borde $y(0) = y(\pi) = 0$, es

$$G(x,z) = \begin{cases} -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2} & , \quad 0 \le z \le x \\ -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{z}{2} & , \quad x \le z \le \pi \end{cases}$$

7. Resuelva

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(x) = \text{cosec } x$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

8. Resuelva

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(x) = f(x)$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0) = y'(0) = 0$.

9. Encuentre la función de Green $G(t, t_0)$ que resuelve

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} = \delta(t - t_0)$$

bajo las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$.

A partir de lo anterior, resuelva

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} = f(t)$$

donde $f(t) = 0$ para $t < 0$. Evalue su respuesta explícitamente para $f(t) = Ae^{-at}$ para $t > 0$.