Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 8

Martes 22 Junio 2010

Residuos y Polos

1. Para cada una de las siguientes funciones, determinar los polos y los residuos en los polos

   a) $\frac{2z+1}{z^2-z-2}$

   b) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

   c) $\frac{\sin z}{z^2}$

   d) $\cot z$

2. Encontrar los residuos, en todos los polos en el plano finito, de

   a) $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

   b) $f(z) = e^z \csc^2 z$

3. Probar que la suma de los residuos de la función

$$f(z) = \frac{2z^5 - 4z^2 + 5}{3z^6 - 8z + 10}$$

   en todos los polos es $\frac{2}{3}$.

4. Encontrar los polos de

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z}$$

   Además, determinar los residuos en los polos.

5. Encontrar, el residuo en $z = 0$, de

$$f(z) = \frac{\cot z \coth z}{z^3}$$

6. Calcular el residuo, en $z = -i$, de

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^{10}}$$

7. Calcular los residuos, en todos los polos, de

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Teorema del Residuo

8. Probar que

$$\oint_c \frac{\cosh z}{z^3} dz = \pi i$$

donde C es el cuadrado de vértices $\pm 2 \pm 2i$.

9. Calcular

$$\oint_c \frac{e^z}{\cosh z} dz$$

alrededor del círculo C definido por $|z| = 5$.

10. Calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$$

alrededor del círculo C dado por $|z| = 3$.

11. Calcular

$$\oint_c e^{-1/z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

donde C es el círculo $|z| = 1$.

12. Sea C el cuadrado limitado por $x = \pm 2, y = \pm 2$. Calcular

$$\oint_c \frac{\sinh 3z}{(z - \pi/4)^3} dz$$

13. Calcular

$$\oint_c \frac{2z^2 + 5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} dz$$

donde c es

a) $|z - 2i| = 6$

b) el cuadrado con vértices en $1 + i$, $2 + i$, $2 + 2i$, $1 + 2i$.

14. Calcular

$$\oint_c \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz$$

donde C es el cuadrado con vértices en $3 + 3i$, $3 - 3i$, $-3 + 3i$, $-3 - 3i$.

15. Calcular

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)}dz,\ t>0$$

alrededor del cuadrado con vértices en $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

Parte Principal

16. Discuta las singularidades de la función

$$f(z)=\frac{z\cos z}{(z-1)(z^2+1)^2(z^2+3z+2)}$$

17. Discuta las singularidades de la función

$$f(z)=\frac{e^z}{\sin z}$$

Integrales Reales Impropias

18. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

19. Probar que

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

20. Calcular

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}dx$$

21. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+4x+13)^2}dx$$

22. Calcular

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+x^2+1}dx$$

23. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}$$

24. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi \ln 2}{2a}$$

25. Probar que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx = \frac{7\pi}{50}$$

Integrales Impropias con senos y cosenos

26. Calcular

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2-\pi^2}dx$$

27. Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{x^4+x^2+1}dx$$

28. Probar que si $m > 0$, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$$

29. Encontrar el residuo, en $z = i$, de

$$\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}$$

para posteriormente calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^5}dx$$

30. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

31. Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{-\pi/\sqrt{3}}$$

Integrales Definidas con senos y cosenos

32. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5 - 3\cos\theta} d\theta$$

33. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$$

34. Probar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4\cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

35. Calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 3\cos t} dt$$

36. Probar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{(5 - 3\cos\theta)^4} d\theta = \frac{135\pi}{16{,}384}$$

Transformadas Inversas de Laplace

37. Si a, p y t son constantes positivas, probar que

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2 + p^2} dz = \frac{\sin pt}{p}$$

38. Probar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

donde a y t son constantes positivas arbitrarias.

39. Probar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \cot^{-1}(z) dz = \frac{\sin t}{t}$$

donde a y t son constantes positivas arbitrarias.

40. Calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{z}{(z^2 + p^2)^2} e^{zt} dz$$

donde a, p y t son constantes positivas arbitrarias.