Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 8

Viernes 6 de Enero 2012

Función Gamma

1. Exprese $\Gamma(k+1/2)$, donde k es un entero positivo, en términos de $\Gamma(1/2)$ y calcular $\Gamma(k+1/2)$ para $k = 1, 2, 3, 4$.

2. Evaluar las siguientes expresiones

   a) $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$

   b) $\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}$

   c) $\frac{\Gamma(3)\Gamma(2{,}5)}{\Gamma(5{,}5)}$

   d) $\frac{6\Gamma(8/3)}{5\Gamma(2/3)}$

3. Evaluar y expresar en términos de la función Gamma, la integral

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n dt$$

   con $n = 0, 1...$

4. Evaluar las siguientes integrales

   a) $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$

   b) $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$

   c) $\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy$

   d) $\int_0^\infty 3^{-4z^2} dz$

   e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

5. Dada la distribución Gamma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

   demostrar que

   a) $f(x)$ está normalizada.

   b) El promedio de x viene dado por $\langle x \rangle = \alpha\beta$.

   c) La varianza de x viene dada por $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \alpha\beta^2$.

6. Demuestre que si s es un número entero y a es fraccionario, se tiene

$$\Gamma(a-s) = (-1)^s \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+s)}$$

7. Demuestre

   a) $\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx$, utilizando el cambio de variable $t = \ln \frac{1}{x}$.

   b) $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2n-1} dr$, utilizando el cambio de variable $t = r^2$.

8. Considere m, n, a constantes positivas. Demuestre

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{na^{(m+1)/n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

9. Considere n entero positivo y $m > -1$. Demuestre

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

10. Una partícula se encuentra en equilibrio en la posición $x = a > 0$ en el instante $t = 0$. Posteriormente, en un instante $t = T$, ella se encuentra en $x = 0$. La ecuación diferencial que modela el movimiento de la partícula está dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x}$$

donde k es una constante positiva. Encuentre el tiempo T que tarda la partícula en ir desde $x = a$ hasta $x = 0$. Para ello reescriba la ecuación en la forma

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x}$$

Resuelva esta ecuación diferencial para encontrar la solución $v = \frac{dx}{dt}$. Luego, obtenga T integrando la solución obtenida.

Función Beta

11. Evaluar

    a) $B(2,3)$
    b) $B(4,3)$
    c) $B(1,1)$

12. Hallar el valor numérico de

    a) $\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}dx$
    b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}d\theta$

13. Demostrar que $B(m,n) = B(n,m)$.

14. Demostrar que

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}(\phi)\cos^{2n-1}(\phi)d\phi$$

15. A partir del ejercicio 14, evaluar

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\phi)\cos^2(\phi)d\phi$$

Ejercicios Complementarios

16. Demostrar la relación

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

    Para ello, considere

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\int_0^\infty e^{-u}u^{y-1}du$$

    y realice el cambio de variable $t = r\sin^2\phi$, $u = r\cos^2\phi$.

17. Utilizando la igualdad obtenidad en 16 y el cambio de variable $t = \frac{x}{x+a}$, demuestre

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(x+a)^{p+q}}dx = a^{-q}B(p,q) = a^{-q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

    con $p,q,a > 0$.

18. Utilizando resultados del ejercicio 16, demostrar

$$\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(\phi)d\phi = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}$$

19. A partir del resultado obtenido en 18, demostrar

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\phi)d\phi = \frac{\sqrt{\pi}n!}{2\Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

    con $n = 0, 1...$

20. Evaluar las siguientes integrales

    a) $\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx$

    b) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$

    c) $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2} dy$

21. Evaluar las siguientes integrales

    a) $\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta d\theta$

    b) $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^5\theta d\theta$

    c) $\int_0^{\pi} \cos^4\theta d\theta$

    d) $\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta d\theta$

    e) $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta$

    f) $\int_0^{2\pi} \sin^8\theta d\theta$

22. Considere
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$
    Demuestre que $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, donde $0 < p < 1$.

23. Calcule $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$ utilizando el resultado del problema 22.

24. Muestre que
$$\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3} dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

25. Demostrar las siguientes relaciones

    a) $\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{\sqrt{1-t}} dt = B\left(p, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}$, con $p > 0$.

    b) $\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, con $n > -1$.

    c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^n}} dt = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{s^{\frac{1}{n}-1}}{\sqrt{1-s}} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma\frac{1}{n}}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$, con $n > 0$.