Autovalores del Laplaciano: aplicaciones en física.

Gonzalo Gutiérrez* & J.M. Yañez

* Departamento de Física,
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Planteamiento del Problema

Dada la ecuación de autovalores

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{definida en } \Omega$$

con condiciones de frontera en $\partial\Omega$

$$\begin{cases} u = 0 & : \text{Dirichlet} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & : \text{Neumann} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \gamma u = 0 & : \text{Robin} \end{cases}$$

interesa conocer:

i el número de autovalores $N(\lambda)$ menores que λ

ii como este número $N(\lambda)$ depende de la forma del dominio Ω.

La ecuación $-\Delta u = \lambda u$ es muy importante en física:

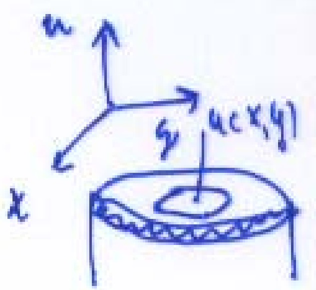
a) Ecuación de Ondas para membrana vibrante:

$u(x,y;t)$: desplazamiento del punto (x,y) en el tiempo t

u obedece $$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Buscamos soluciones del tipo $u(\vec{x},t) = e^{i\omega t} v(\vec{x})$;

$\Rightarrow$ v cumple con $-\Delta v = \lambda v$, con $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$



si los bordes están fijos, tenemos cond. borde Dirichlet,

$$v\Big|_{\text{borde}} = 0.$$

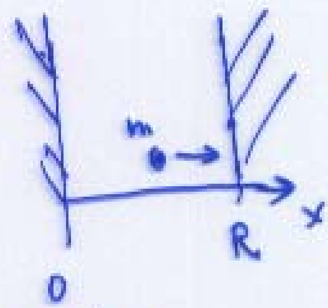
b) Ecuación de Schrödinger :

▶ $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x}) = E\,\Psi(\vec{x})$$

: movimiento de una partícula de masa m (electrón) en el potencial $V(\vec{x})$.

Si la partícula sta confinada en un potencial del tipo

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \forall\, |\vec{x}| < R \\ \infty & \forall\, |\vec{x}| \geq R \end{cases}$$



entonces se tiene que el problema anterior se reduce a

$$-\Delta\Psi = E\Psi \qquad \text{con } \Psi\Big|_{\text{borde}} = 0$$

La solución $\{\Psi_n, \lambda_n\}$ da los autoestados y las energías permitidas, respectivamente.

▶ En general, no solo interesa conocer $N(\lambda)$: densidad de stados integrada

sino también $\mathcal{D}(\lambda) = \dfrac{dN(\lambda)}{d\lambda}$: # de stados entre λ y $\lambda + d\lambda$

c) Ondas de presión en una pieza cerrada ("cavidad resonante")

$$\Delta\phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t} = 0 \quad \text{con } \phi: \text{ presión, densidad, perturbación.}$$

• Separando variables, obtenemos

$$-\Delta\phi = \lambda\phi \quad \text{con } \lambda = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\text{y} \quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\text{borde}} = 0 \quad : \text{Neumann.}$$

• Supongamos que la pieza tiene cortinas (impedancia).

entonces $\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\text{borde}}$ no es exactamente cero, sino que

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\text{borde}} = -\gamma\,\phi\Big|_{\text{borde}} \quad : \text{Robin}$$

· Se entiende mejor en una cuerda.

Dirichlet. $\phi| = 0$. Neumann $\frac{\partial\phi}{\partial n}| = \ldots$ Robin $(\frac{\partial\phi}{\ldots}$

N.B: Dada la Ec. Helmholtz

$$\begin{cases} \cdot\ \Delta\phi + \lambda\phi = 0 \\ \cdot \text{ cond. borde: } D,\ N,\ R \end{cases} \quad \text{se obtiene} \quad \begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix}$$

→ Tanto φ_n como λ_n dependen de i. tipo cond. borde

ii. forma del borde.

Osea: Dado un tipo de cond. de borde

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Forma del borde} & & \text{Determinan univocamente} \\ (\text{prop. geometricas: } V, S, L, \text{etc}) & \longleftrightarrow & \{\varphi_n, \lambda_n\}. \end{array}}$$

¿Se puede escuchar la forma de un tambor?

Ec. Ondas: $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) + \lambda \varphi(r) = 0 \qquad \varphi(r)\Big|_{\text{borde}} = 0$

→ Depende la distribución de tonos (autovalores λ) de la forma del tambor (condición de borde: forma del borde)?

→ como se distribuyen los autovalores, dependiendo de la forma del borde

→ Conociendo los autovalores, puedo saber la forma del tambor? ¿Cuantos autovalores necesito como mínimo?

Weyl (1911) $\quad N(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\approx} \dfrac{V}{6\pi^2}\lambda^{3/2}$, o $\dfrac{dN(\lambda)}{d\lambda} = \mathcal{D}(\lambda) \approx \dfrac{V}{4\pi^2}\lambda^{1/2}$

Estudiar lo anterior es equivalente a estudiar la suma

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \quad \text{para } t \to 0.$$

En 2-dim:

Pleijel (1954) $\quad S(t) \simeq \dfrac{A}{4\pi t} - \dfrac{L}{4}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}$

KAC (1966) : $\quad S(t) \simeq \dfrac{A}{4\pi t} - \dfrac{L}{4}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\pi^2 - \gamma_i^2}{24\pi\gamma_i}$

esquinas

∡ interiores

borde poligonal.

$+ \dfrac{1}{6}(1-r)$

borde suave

Error en formula: dominio poligonal : $\mathcal{O}(\exp)$

dominio suave : $\mathcal{O}(t^{\alpha})$

En 3-dim:

Waechter (1972): $$S(t) \simeq \frac{V}{(4\pi t)^{3/2}} \mp \frac{A}{16\pi t} + \frac{M}{6\pi(4\pi t)^{1/2}} + \frac{J}{512\pi}$$

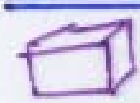
$\mp$ Neumann.

donde $M = \int_S \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\, ds$, K_1, K_2 curvaturas pples de S.

Esfera. $K_1 = K_2 = \frac{1}{R}$

$$J = \int_S (K_1 - K_2)^2\, ds .$$

$M = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{2}{R}\right) 2 \cdot 4\pi R\, dR$

	V	A	M	J
	$a_1 a_2 a_3$	$2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$	$\frac{3}{2}\pi(a_1+a_2+a_3)$	-64π
	$\pi r^2 \ell$	$2\pi r(r+\ell)$	$\frac{\pi}{2}(2\ell + 3\pi r)$	$2\pi\left(\frac{\ell}{r} - \frac{64}{3}\right)$
	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$4\pi R^2$	$8\pi R$	0

- Densidad de Estados: a partir de lo anterior (y tb. en forma independiente) Balian & Bloch

Se puede obtener la densidad de estados $\mathcal{D}(\lambda)$

$$\mathcal{D}(\lambda) \cong \frac{V}{4\pi^2}\lambda^{1/2} \mp \frac{A}{16\pi} + \frac{J}{12\pi^2 \lambda^{1/2}} + \dots \quad \text{para } \lambda \to \infty .$$

N.B: Esta es la forma útil en la mayoría de los casos, por ejemplo para gas ideal cuántico:

$$\ln Z^{gr} = \pm g_0 \int_0^\infty \ln[1 \pm e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}]\, \mathcal{D}(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad \begin{matrix} FD \\ BE \end{matrix}$$

Amer. Math. Monthly, 73, 1-23 (1966)

CAN ONE HEAR THE SHAPE OF A DRUM?

MARK KAC, The Rockefeller University, New York

To George Eugene Uhlenbeck on the occasion of his sixty-fifth birthday

On Hearing the Shape of a Drum

J. Comb. Th. 1 (1966)

MICHAEL E. FISHER

Wheatstone Physics Laboratory, King's College, London, W.C. 2, England *

Communicated by George Uhlenbeck

Proc. Camb. Phil. Soc. (1972), 72, 439
PCPS 72-48
Printed in Great Britain

On hearing the shape of a drum: an extension to higher dimensions

BY R. T. WAECHTER*

Department of Mathematics, University College London, Gower Street, London, W.C. 1

On hearing the shape of rectilinear regions

E. M. E. Zayed and A. I. Younis

Mathematics Department, Faculty of Science, Zagazig University, Zagazig, Egypt

Hearing the shape of a general doubly connected domain in R^3 with impedance boundary conditions

E. M. E. Zayed[a]

Mathematics Department, Zagazig University, Faculty of Science, Zagazig, Egypt

(Received 28 November 1989; accepted for publication 23 May 1990)

The basic problem in this paper is that of determining the geometry of a general doubly connected domain in R^3 together with an impedance condition on its inner bounding surface and another impedance condition on its outer bounding surface, from the complete knowledge of the eigenvalues $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ for the three-dimensional Laplacian using the asymptotic expansion

VOLUME 66, NUMBER 12 PHYSICAL REVIEW LETTERS 25 MARCH 1991

Can One "Hear" the Thermodynamics of a (Rough) Colloid?

Bertrand Duplantier

Service de Physique Théorique de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette CEDEX, France

Drums That Sound the Same

S. J. Chapman

VOLUME 72, NUMBER 14 PHYSICAL REVIEW LETTERS 4 APRIL 1994

Experiments on Not "Hearing the Shape" of Drums

S. Sridhar and A. Kudrolli

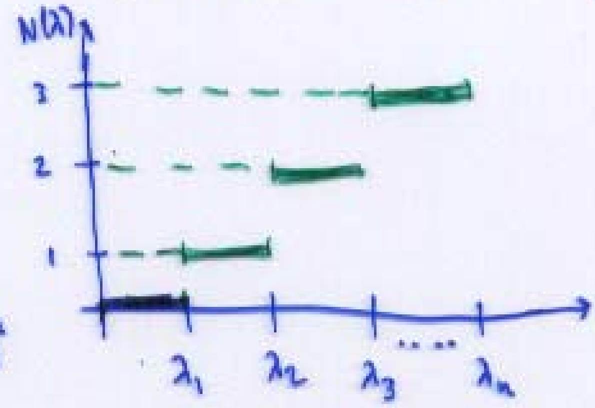
Department of Physics, Northeastern University, Boston, Massachusetts 02115

▷ Un punto clave a notar que es equivalente el studio de $N(\lambda)$ o el de la serie $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$

Se puede ver así

- Necesitamos calcular $N(\lambda)$ para $-\nabla^2 \varphi = \lambda \varphi$ con $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$$



o $N(\lambda) = \int_0^{\lambda} \sum_n \delta(\lambda' - \lambda_n)\, d\lambda'$

Llamamos $\sum_n \delta(\lambda - \lambda_n) = \mathcal{D}(\lambda)$: densidad de estados ; $\mathcal{D}(\lambda) = \frac{dN(\lambda)}{d\lambda}$

O sea, si conocemos $\mathcal{D}(\lambda)$, integrando con respecto a λ obtenemos

$$N(\lambda) = \int_0^{\lambda} \mathcal{D}(\lambda')\, d\lambda'$$

Tomemos la transformada de Laplace de $\mathcal{D}(\lambda)$:

$$S(t) = \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\lambda)\, e^{-\lambda t}\, d\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} \Big[\sum_n \delta(\lambda - \lambda_n)\Big] e^{-\lambda t}\, d\lambda = \sum_n e^{-\lambda_n t} \quad //.$$

Análisis de Kac.

en Difusión de una gota de tinta concentrada inicialmente (t_0) $\vec{p}(x_0, y_0)$

Ω

- Concentración: $P_\Omega(\vec{p}|\vec{r},t)$ obedece a la ec.

$$\frac{\partial P_\Omega}{\partial t} = D P_\Omega \quad \text{Ec. difusión}$$

con cond. borde $\quad P_\Omega(\vec{p}|\vec{r}t) \to 0$ cuando $\vec{r} \to \vec{a}$, $a \in \partial\Omega$.

cond. inicial $\quad P_\Omega(\vec{p}|\vec{r}t) \to \delta(\vec{r}-\vec{p})$ cuando $t \to 0$

- $P_\Omega(\vec{p}|\vec{r},t)$ se puede expresar en terminos de los autovalores y autofunciones del problema $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$ con $\phi\big|_{\partial\Omega} = 0$.

$$P_\Omega(\vec{p}|\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \phi_n(\vec{p})\, \phi_n(\vec{r})$$

- Para t pequeñas, la difusión es chica, y portanto la gota "<u>no siente</u>" los efectos del borde $\partial\Omega$ $\Rightarrow P_\Omega(\vec{p}|\vec{r};t) \sim P_0(\vec{p}|r,t)$

donde $P_0(\vec{p}|r,t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{p}|^2}{4t}}$: Kernel (Green) para ec. difusión (calor) en el espacio infinito.

$\therefore$ para $t \to 0$

$$P_\Omega = \sum e^{-\lambda t} \phi_n(\vec{p}) \phi_n(\vec{r}) \Big|_{\vec{p}=\vec{r}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t_0} \phi_n^2(\vec{r}) \sim \frac{1}{4\pi t_0}$$

$$\int \sum_{}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \phi_n^2(\vec{r})\, d\vec{r} \sim \int \frac{1}{4\pi t} d\vec{r} \Rightarrow \boxed{\sum^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim |\Omega|}$$

En general:

Bordes suaves en D dimensiones:

$$S(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{D/2}} \sum_{i=0}^{k} a_i t^{i/2} + \theta\left(t^{(k-D+1)/2}\right)$$

los primeros 5 a_i son conocidos.

1992 C. Gordon, D. L. Webb & S. Wolpert demostraron que existen dominios isoespectrales, y mostraron uno en 2-dim.

1994 S. Sridhar & A. Kudrolli lo probaron experimentalmente.

▷ Ejemplo de como obtener $S(t)$ en el caso de caja de lados a_1, a_2, a_3

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \prod_{i=1}^{3} \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n_i^2 t}{a_i^2}}$$

$$= \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\left[\theta\left(\frac{\pi t}{a_i^2}\right) - 1\right]$$

función theta de Jacobi

Se sabe $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(\frac{1}{t}\right)$

$$\Rightarrow \quad S(t) = \frac{1}{8} \prod_{i=1}^{3} \left[\frac{a_i}{\sqrt{\pi t}}\,\theta\left(\frac{a_i^2}{\pi t}\right) - 1\right]$$

y como $\theta\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi}{x}} \leq 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = 1 + \theta\left(e^{-\pi/x}\right)$

Por tanto, reemplazando en $S(t)$ queda

$$S(t) = \frac{a_1 a_2 a_3}{(4\pi t)^{3/2}} - \frac{2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3)}{16\pi t} + \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{4(4\pi t)^{1/2}} - \frac{1}{8} + \text{exp. chicos.}$$

Comprobación Experimental.

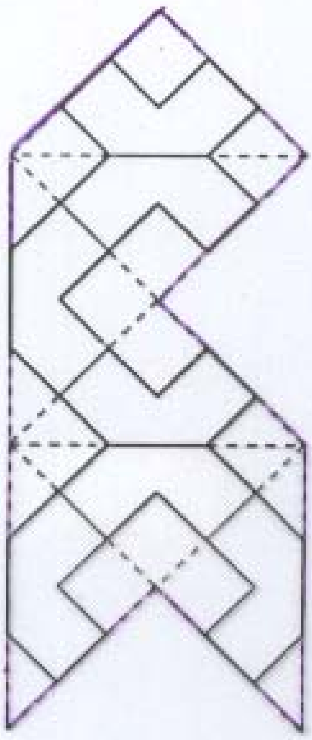
1 Experiments on Not "Hearing the shape" of Drums. PRL 72, 2175 (1994)

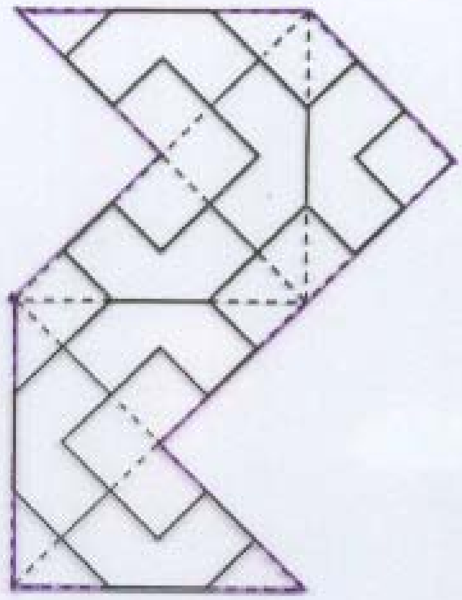
- Usan cavidades resonantes en microondas, muy delgadas,
- Verifican que los primeros 54 λ_n son iguales con $1/10^4$ de aproximación.

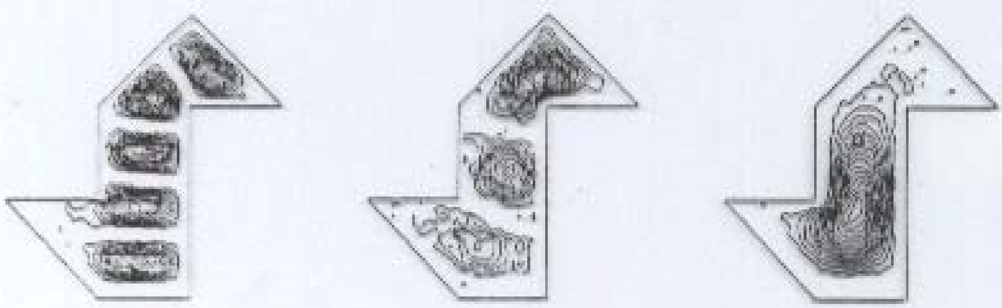
2 Tambores líquidos. Inv. y Ciencia, Sept. 1997
PRL 76, 1655 (1996).

- Usan películas de cristales líquidos, en las dos geometrías diferentes. Miden la amplitud y frecuencia de vibración en ambos y se corresponden bien.

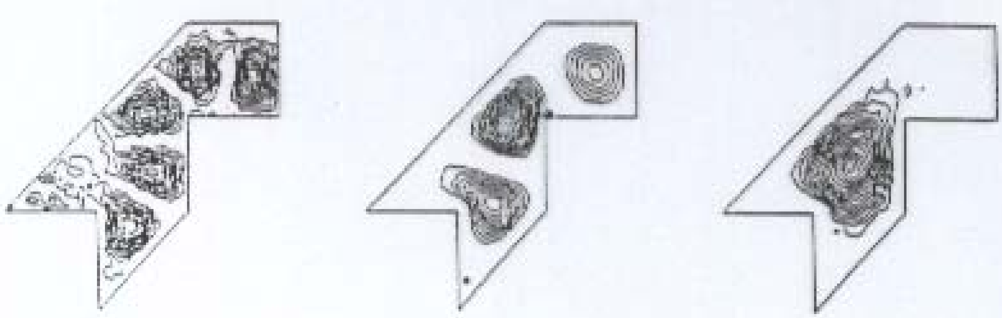
3 ¿Por qué no hacerlo en un tambor "real"?







A



B

GAS IDEAL "CLASICO": (G.G & J.Y, Am. J. Phys. 65 (1997))

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \underbrace{V_{int}}_{=0} + V_{ext}$$

V_{ext} → paredes del recipiente.

$V_{int} = 0$: partículas no interactuantes

≡ GAS IDEAL

GAS IDEAL
- CUANTICO
  - fermions
  - bosons $\quad \mathcal{Z} = \prod_k \left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}\right)^{\mp 1}$
- $\boxed{\text{"CLASICO"}}$: debe cumplir la condición que

$$\lambda_{dB}^3 \left(\frac{N}{V}\right) \ll 1.$$

$\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_BT}}$: longitud onda de de Broglie.

Ej: Argón gaseoso $80°K \Rightarrow 1.6 \times 10^{-6}$.

$300°K \sim 10^{-11}$.

La condición se cumple para T alta $(T \to \infty, \beta \to 0)$ o $\rho = \frac{N}{V}$ bajo: gas diluido.

Debemos calcular: $\quad Z = \sum_n e^{-\beta \epsilon_n}$: función partición 1 partícula.

$\left(\mathcal{Z} = \frac{Z^N}{N!}\right)$

con ϵ_n: autovalores de la Ec. Schrödinger con condición borde Dirichlet:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + \left(\frac{2m}{\hbar^2} E\right) \Psi(\vec{r}) = 0 \quad : \Psi(\vec{r})\Big|_{\text{borde}} = 0.$$

– Dos posibilidades:
- i Hacer la suma directamente ✓ (para $\beta \to 0$)
- ii Calcular densidad de estados (para $E \to \infty$)

¡Es equivalente!

1 Motivación: En las fórmulas de los textos, las propiedades termodinámicas no dependen de la forma del contenedor, sino sólo de su volumen.

Deducción usual para gas ideal clásico: (en una caja)

N partículas idénticas, de masa m, encerradas en volumen V a temp T

$$Z = \frac{z^N}{N!} \quad \text{donde} \quad z = \sum_{\{estados\}} e^{-\beta \varepsilon_n}$$

$V = a_1 a_2 a_3$

$$\varepsilon_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left[\left(\frac{n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{a_3}\right)^2\right]$$

$$z = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\beta n^2}\right)^3 \longrightarrow$$

Esta suma la transformamos en integral, introduciendo la densidad de estados $\mathcal{D}(\varepsilon)\,d\varepsilon$.

i.e

$$\sum_{\{estados\}} e^{-\beta\varepsilon_n} \rightarrow \int_0^\infty \mathcal{D}(\varepsilon)\, e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon$$

donde $\mathcal{D}(\varepsilon) = \left(\frac{V}{4\pi^2}\right)\cdot\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\varepsilon^{1/2}$: es posible hacerlo pues en el límite cuando $V \to \infty$, los estados están muy juntos. (continuo).

Por tanto:

$$Z = \frac{1}{N!}\,\frac{V^N}{2^{3N}}\left[\frac{2m}{\pi\hbar^2\beta}\right]^{\frac{3N}{2}} \; ; //$$

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{N,V} = \frac{3}{2}NkT$$

$$p = -kT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{NkT}{V}, \text{etc.}\ldots$$

¿Depende de la forma del envase?

Sí, No, ¿cómo?

Gas ideal Clásico: Aplicación:

I: 2 - dim :

$$Z(\beta) \simeq \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\frac{A}{4\pi\beta} - \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\frac{L}{4(4\pi\beta)^{1/2}} + C$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi^2 - \alpha_i^2}{24\pi\alpha_i}$$

Energía interna U: $\frac{U}{N} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

desarrollando en serie de potencias de β ($\beta \ll 0$), se tiene

$$U(T) = Nk_BT\left[1 + \frac{1}{8}\frac{L}{A}\Lambda(T) - \left(C - \frac{1}{32}\frac{L^2}{A}\right)\frac{1}{A}\Lambda^2(T) + \theta(\Lambda^3)\right]$$

con $\Lambda(T) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$: longitud de onda térmica.

Ejemplo: Gas Argon, $T \simeq 300°K$; $\lambda_{dB} \simeq 0.045 Å$

distancia interatómica $\simeq 30° Å$

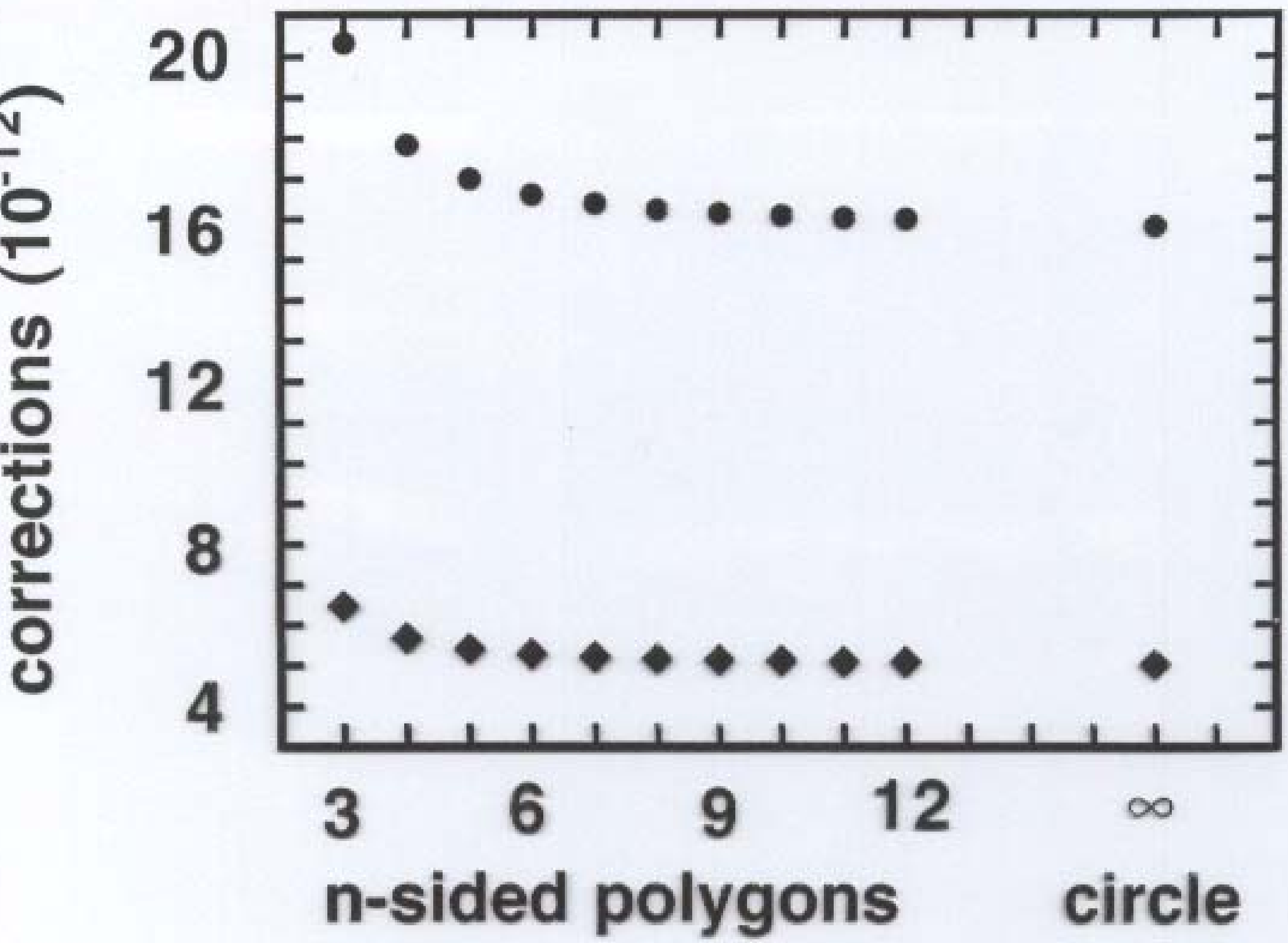
Polígono regular $C = \frac{1}{6}\frac{(n-1)}{(n-2)}$ n: # de lados.

$$\frac{L^2}{A} = 4n\,tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Gas Argón en 2-dim : Correcions a la energía $U = N k_B T \left[1 + \frac{1}{8} \frac{L}{A} \Lambda(T) + \cdots \right]$

◆ $1\ m^2$

● $0.1\ m^2$



3-dim : Gas ideal clásico:

Función partición:

$$Z(\beta) \simeq \left(\frac{2M}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{V}{(4\pi\beta)^{3/2}} - \left(\frac{2M}{\hbar^2}\right) \frac{A}{16\pi\beta} + \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2}} \frac{M}{(4\pi\beta)^{1/2}} + \frac{J}{512\pi}$$

Energía Interna:

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{1}{12} \frac{A}{V} \Lambda(T) - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{8}\frac{A^2}{MV}\right)\frac{M}{V}\Lambda^2(T) - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{J}{64} + \frac{1}{3}\frac{AM}{V} - \frac{\pi}{24}\frac{A^3}{V^2}\right)\frac{1}{V}\Lambda^3(T) + \mathcal{O}(\Lambda^4(T)) \right]$$

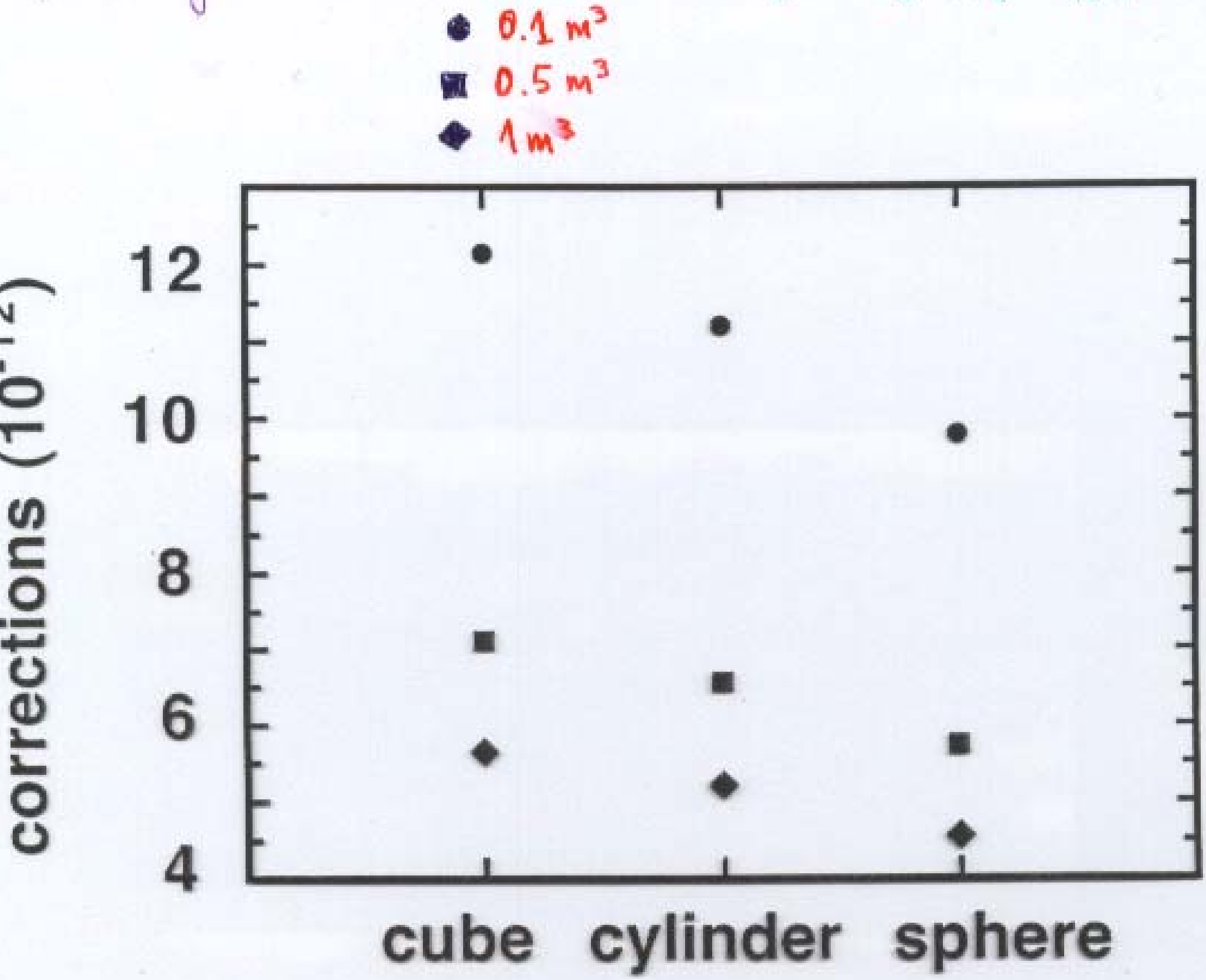
Desigualdad Isoperimétrica de Minkowski:

$$M^2 \geq 4\pi A \quad ; \quad A^2 \geq 3VM$$

1ra corrección mínima en caso de la esfera.

Ejemplo: Argon.

Gas Argón en 3-dim: Correcciones a la energía $U = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{1}{12} \frac{A}{V} \Lambda(T) + \dots \right]$



l Gas Feel the Shape of Its Container?" by GONZALO GUTIERREZ and J. YÁÑEZ

Aplicaciones y desarrollos recientes.

1 Resonadores acústicos.

La onda de presión $p(\vec{x},t)$ obedece la ec. ondas

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Haciendo separación de variables,

llegamos a $\quad \nabla^2 p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0 \quad$ con $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$

i.e. Ec. Helmholtz con C.B. Neumann.

¿Se puede escuchar la forma de una catedral?

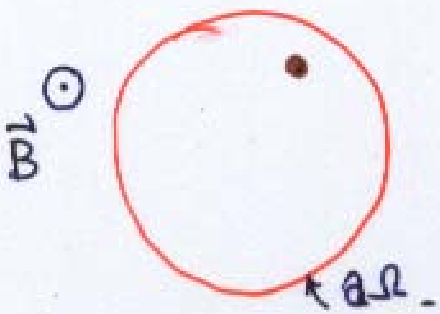
- Si no hay cortinas → aplicación directa de la expansión asintótica
- Si hay cortinas → las condiciones de borde cambian

a C.B. impedancia o de Robin $\Big\}$ $\boxed{\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \varkappa p\right)_{\partial\Omega} = 0}$

2-D En este caso existe fórmula : Zayed (2000) J. Ap. Math.

$$S(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \begin{cases} \dfrac{|\partial\Omega|}{8(\pi t)^{1/2}} + \left(1 + \dfrac{3\varkappa}{\pi}|\partial\Omega|\right)\dfrac{1}{6} & \text{si } \varkappa \ll 1 \\[2ex] \dfrac{\{|\partial\Omega| + 2\pi/\varkappa\}}{8(\pi t)^{1/2}} + \dfrac{1}{6} & \text{si } \varkappa \gg 1 \end{cases}$$

2. Billar circular en un campo magnético



$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$$

$$\text{con } \varphi(r,\theta)\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Narevich et al (J.Phys.A: Math, 1999) encontró la sgte. expansión

para $S(t) = tr\left(e^{-\frac{t}{\hbar}H}\right) = \sum_{\{estados\}} e^{-\frac{t}{\hbar}E_n}$

$$\sim |\Omega|$$

$$S(t) \approx \frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{24} + \frac{7\tau^3}{5760} - \frac{31\tau^5}{945\times 2^{10}} \cdots\right)$$

$$- \frac{\sqrt{\pi}R}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{3\tau^{3/2}}{64} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\qquad\qquad \right)$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{2^7 \cdot R}\left(\qquad\qquad \right)$$

$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$

$R = \sqrt{\frac{2ma^2\omega}{\hbar^2}}$

$\tau = t\omega$

$\omega = \frac{e|\vec{B}|}{mc}$

Dado que $S(t)$ es la func. partición en el ensemble canónico,

con $t = \hbar\beta$ $\quad \beta = \frac{1}{k_B T}$, se puede determinar, p.ej.

la susceptibilidad magnética χ a tamaño finito:

Para: N partículas por unidad de área y

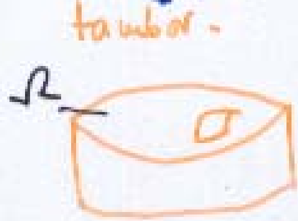
$$\lambda_T = \sqrt{\frac{\pi\hbar^2\beta}{2m}} \ll \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \text{(gas diluido y altas T)}$$

se tiene.

$$\frac{\chi}{\chi_\infty} = 1 - \left(\frac{\lambda_T}{a}\right)\frac{1}{8} - \left(\frac{\lambda_T}{a}\right)^2\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{21\pi}\right) - \left(\frac{\lambda_T}{a}\right)^3\left(\frac{1}{8} - \frac{3049}{10752\pi}\right) \cdots$$

con χ_∞ : susceptibilidad de Landau (i.e, plano infinito)

Conjetura de Payne-Pólya-Weinberger



En un tambor, el cociente de los 2 primeros tonos, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ es máximo para el caso del círculo.

O sea, dado un $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, para los primeros autovalores del problema de Helmholtz con cond. borde Dirichlet se cumple que

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \le \left.\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|_{\Omega = \text{disco}} = \left(\frac{j_{1,1}}{j_{0,1}}\right)^2$$

: Conjetura P-P-W 1955.

Demostrada por M. Ashbaugh y R. Benguria en 1991 (para $\Omega \subset \mathbb{R}^d$)

Conjetura de Ashbaugh y Benguria.

En 1991 demuestran que $\frac{\lambda_3}{\lambda_2} < \left(\frac{j_{1,1}}{j_{0,1}}\right)^2$: $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$

y conjeturan que para el problema de Neumann en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\boxed{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \dots + \frac{1}{\mu_d} \geq d \left(\frac{|\Omega|}{\omega_d}\right)^{2/d} \frac{1}{(p_{d/2,1})^2}.}$$

[$p_{\nu,k}$: k-ésimo cero de $(x^{1-\nu} J_\nu(x))'$]

¿Puede un gas ideal sentir la forma de su envase?

Gonzalo Gutiérrez Depto de Física
Universidad de Santiago

Basado en: G G y Julio Yañez, A. J. Phys., 65 (8), August 1997 p. 739.

Plan:

1. Motivación: ¿qué es un gas ideal? Límite termodinámico.
2. Conexión con Mec. Estadística y Ecuación de Helmholtz
   - Gas ideal clásico: . cálculo de la función partición en 2D y 3D
     . cálculo de prop. termodinámicas en 2D y 3D.
3. Aplicaciones y desarrollos recientes.
4. Conclusiones.

2 Termodinámica en sistemas finitos:

Relación Fundamental: $U = U(S, V, \overset{A}{\wedge} N)$

Suposición Ad-Hoc: U es función homogénea: $U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, N)$

Se puede hablar de $\rho = \frac{N}{V}$ etc

$\delta W = -p\,dV$: cierta en
→ sólo cambia el volumen, manteniéndose el área.
→ si el sistema es espacialmente homogéneo: (sin efecto de superficie.) Entonces

$p = p(\rho, T)$: igual para todas las formas y tamaños.

- O sea, se asume la existencia de un "Bulk límite" $V \to \infty$, $\rho = \frac{N}{V}$ fijo

no: "límite termodinámico"!

Relaciones de Gibbs-Duhem sólo se cumplen en sist. homogéneos: $U = TS - pV + \mu N$

Sistemas finitos: Se pierde homogeneidad, en los bordes hay variaciones locales.

- Supongamos variaciones locales superficiales iguales en todo el sistema. Se esperaría que ellas contribuyan a las prop. termodinámicas en un término proporcional al área.

1ra Suposición: $\delta W = -p\,\delta V + \gamma\, dA$: γ es tensión superficial entre fluido y pared sólida.

Contribución del trabajo del cambio de área sin cambio de volumen:

Así $U = U(S, V, A, N)$, $dU = T\,dS - p\,dV + \gamma\, dA + \mu\, dN$.

Consideremos el Potencial Gran Canónico $\Omega = \Omega(T, V, A, \mu)$

$$d\Omega = -S\,dT - p\,dV + \gamma\,dA - N\,d\mu$$

2da suposición: Ω es la suma de funciones proporcionales al volumen y al área

$$\Omega(T,V,A,\mu) = \underbrace{V\,\omega(T,\mu)}_{\text{parte bulk}} + \underbrace{A\,\omega'(T,\mu)}_{\text{parte superficie}}$$

Extensión de bulk homogeneidad.

Así. $p = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial V}\right)_{T,A,\mu} = -\omega$

$$\gamma = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial A}\right)_{T,V,\mu} = \omega'$$

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,A,\mu} = V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\mu} + A\left(-\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)_{\mu} \equiv Vs + As'$$

$$N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V,A} = V\left(\frac{\partial p}{\partial\mu}\right)_{T} + A\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}\right)_{T} \equiv V\rho + A\rho'$$

$$dp = \rho\,d\mu + s\,dT \qquad ; \qquad -d\gamma = \rho'\,d\mu + s'\,dT$$

y tb $\quad u = -p + Ts + \rho\mu \rightarrow$ energía interna de bulk

$\quad u' = \gamma + Ts' + \rho'\mu \rightarrow$ energía interna de superficie.

→ p es la presión de bulk, lejos de la superficie: supongamos cambiamos V (sin cambiar la forma)

$$p_t = -\frac{\delta W}{\delta V} = p - \gamma\frac{\delta A}{\delta V} \quad ; \quad \frac{\delta A}{\delta V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\therefore \boxed{p_t = p - \gamma\frac{1}{R}} \rightarrow \text{para una esfera}$$

Mecánica Estadística de sistemas finitos:

Las relaciones entre una Relación Fundamental y las funciones de partición en diferentes ensembles son rigurosamente ciertas para sistemas finitos:

Energía libre Helmholtz $F = -kT \ln Z$: canónico. $F = F(T, V, N)$

Potencial Gran Canónico $\Omega = -kT \ln Z^{gr}$

Propiedades del Bulk:

Tomar $V \to \infty$ con $\rho = \frac{N}{V}$ fijo:

$$\lim_{V\to\infty} -\frac{kT}{V} \ln Z = -p + \rho\mu \qquad (F = -pV + \mu N)$$

$$\lim_{V\to\infty} -\frac{kT}{V} \ln Z^{gr} = -p^{gr} \qquad (\Omega = -pV)$$

→ Uno "espera" que el próximo término en la expansión sea proporcional al Área.

$$-kT \ln Z \sim (-p + \rho\mu)V + (\gamma + \rho'\mu)A$$

$$-kT \ln Z^{gr} \sim p^{gr} V + \gamma^{gr} A$$

- O sea, dada la función partición podemos calcular los p, γ, etc:

$$\gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T,V,N} = \left(\frac{\partial}{\partial A}(-kT \ln Z)\right)_{T,V,N}$$

$$\gamma^{gr} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial A}\right)_{\mu,V,T} = \left(\frac{\partial}{\partial A}(-kT \ln Z^{gr})\right)_{\mu,V,T}.$$

⋮

4 Conclusiones.-

1 Se analizó la influencia de un contenedor finito en las cantidades termodinámicas del sistema.

2 Se particularizó al caso del gas ideal clásico:
- basados en conocidos resultados sobre las propiedades asintóticas del espectro del Laplaciano $-\nabla^2$, se calculó la Función partición $Z = Z(T, V, A, \text{y otras}..)$

3 En principio, un gas ideal <u>puede</u> sentir algunos aspectos de la forma de su envase, pues las cantidades termodinámicas dependen de ellas: volumen, área, radio curvatura, # de esquinas, etc.

4 Un ejemplo práctico muestra que tales correcciones son muy pequeñas (tal vez imposible de medir) $\Rightarrow$ aproximación de "bulk" es buena.

5 De acuerdo a resultados teóricos y experimentales recientes, es posible tener dominios isoespectrales: dos dominios que a pesar de tener diferente forma, tienen exactamente los mismos autovalores del $-\nabla^2$.

- Si un gas ideal se pone dentro de estos dominios, entonces aún teniendo todos los términos en el desarrollo de la función partición, a partir solo de las propiedades termodinámicas no se puede distinguir la forma del envase.

$\Rightarrow$ ¿Puede un gas ....? SI

¿Puede distinguir entre dos envases? En general NO

SESION INVITADA 1: Física Matemática COMCA 2004, 4 - 6 Agosto

Día	Hora	Autores	Universidad	Titulo
Mierc 4	15:00	Marco Corgini	ULS	Study of nonideal Bose Gases.
	15:30	Héctor Torres	ULS	Integral Representations for Gibbs Semigroups: Nonlinear Perturbations of the free Quantum oscillators and Bose-Einstein Condensation.
	16:00	Arturo Bernal	ULS	Gaussian Domination and Bose-Einstein Condensation : Diagonalizable Systems.
	16:30	Eduardo Notte	ULS	The Clifford Algebra of Multivectors over a Finite Dimensional Real Vector Space.
	17:00	Antonio Moya	U . Antofagasta	Energy and Angular Momentum Extensor Fields for the Dirac Spinor Field.
Juev 5	17:30	Gonzalo Gutierrez	UCHILE - USACH	Autovalores del Laplaciano : Resultados Recientes y Aplicaciones en Física.
	18:00	Victor Cortés	PUCS	Time Life for Relative Bounded Perturbations.
	18:30	Rodrigo Pérez	PUCS	Decaimiento Exponencial.

Arica, 2004.

Seminario

Grupo de Investigación en Análisis Funcional y Ecuaciones de Evolución

Dr. Gonzalo Gutiérrez

Universidad de Chile

"Valores Espectrales del Laplaciano: Aplicaciones"

Jueves 30 de Septiembre, 16:30 Horas, Sala 17 DMCC.

Universidad de Santiago de Chile.
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.